

Probabilité

Youssef ARIBOU

Ecole Supérieur de Technologie de Làayoune

Université Ibn Zohr Agadir

Chapitre 1

Analyse Combinatoire

Analyse Combinatoire

- L'objectif de l'**analyse combinatoire** est le comptage des groupes d'éléments que l'on peut construire à l'aide des éléments d'un ensemble fini.
- L'**analyse combinatoire** permet de répondre à plusieurs problèmes de calcul des probabilités basés sur la détermination des choix possibles.

Eléments discernable et indiscernable

➤ Il existe deux types d'éléments qui forment les ensembles qui sont couramment étudiés:

❖ Eléments discernables:

Ce sont les éléments qui sont tous différents.

Exemple 1: $\Omega = \{a, b, c, d\}$

❖ Eléments indiscernables:

Ce sont les éléments qui ne sont pas tous distingués.

Exemple 2 : $\Omega = \{a, a, a, b, b, c, c, c, c, d, d\}$

Disposition

- **La disposition** est un groupe d'éléments pris d'un ensemble. On peut distinguer plusieurs types de dispositions .

- ❖ **Disposition sans répétition:**

C'est une disposition dont chaque élément ne peut apparaitre plus qu'une fois.

Exemple 1 :

Soit une urne qui contient deux boules numérotées 1 et 2. On tire sans remise les deux boules successivement.

Alors les résultats possibles sont: (1,2) et (2,1).

Donc les couples (1,2) et (2,1) sont des dispositions sans répétition.

❖ Disposition avec répétition:

C'est une disposition dont chaque élément peut apparaître plus qu'une fois.

Exemple 2 :

Soit une urne qui contient deux boules numérotées 1 et 2.

Supposons que la première boule tirée est remise dans l'urne avant de réaliser le second tirage.

Alors les résultats possibles sont: $(1,1)$; $(1,2)$; $(2,1)$ et $(2,2)$.

Donc les couples $(1,1)$; $(1,2)$; $(2,1)$ et $(2,2)$ sont des dispositions avec répétition.

❖ Disposition ordonnée:

C'est une disposition dont l'emplacement des éléments joue un rôle dans la composition de celle-ci.

Exemple 1:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$$

❖ Disposition non ordonnée:

C'est une disposition dont l'emplacement des éléments ne joue aucune rôle dans la composition de celle-ci.

Exemple 2 :

$$\Omega = \{2, 1, 4, 5, 3, 6\}$$

Multiplets

Exemple 1:

Pour avoir une tenue (une chemise , un pantalon et une paire de chaussures), une personne peut choisir une chemise parmi 6 chemises, un pantalon parmi 5 pantalons et une paire de chaussures parmi 3 paires de chaussures.

Alors cette personne peut s'habiller de $90 = 6 \times 5 \times 3$ façons différentes.

Exemple 2:

Un investisseur financier peut choisir un portefeuille diversifié d'actions relatives à divers secteurs d'activité: Une action parmi 6 du secteur agroalimentaire, une action parmi 4 du secteur énergétique, et une action parmi 3 du secteur bancaire.

Alors le nombre de choix possibles pour un éventuel investissement est égal à :

$$72 = 6 \times 4 \times 3$$

Permutation sans répétition

- **Une permutation sans répétition** d'un ensemble de n éléments est **une disposition ordonnée** de ces éléments dont chaque élément ne figure qu'une seule fois et occupe un rang donné.
- Le nombre de permutation sans répétition qu'on peut former à partir d'un ensemble de n éléments est égal à $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$

Exemple 1:

Les permutations qu'on peut construire à partir de l'ensemble $E = \{a, b, c\}$ sont:

$(a, b, c), (a, c, b)$

$(b, a, c), (b, c, a)$

$(c, a, b), (c, b, a).$

Le nombre de permutation est égal à $3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$

Permutation sans répétition

Exemple 2:

Soit E un ensemble constitué de n lettres de l'alphabet. Etant donné un tableau formé de p cases. On veut écrire une lettre dans chacune des cases de ce tableau.

Case 1	Case 2			Case p

- Pour la case N°1, on va choisir une seule lettre parmi n lettres.
Alors on aura n choix possibles pour la première case.
- Dans notre cas, on suppose que $p = n$.

Permutation sans répétition

Une fois la case N°1 est occupée, il ne reste à choisir qu':

- Une lettre parmi les $(n-1)$ lettres restantes pour la case N° 2;
- Une lettre parmi les $(n-2)$ lettres restantes pour la case N° 3;
-
- La dernière lettre parmi restante pour la case N° p ;

D'où le résultat:

$$P_n = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 2 \times 1$$

Permutation avec répétition

- Soit E un ensemble construit à partir de k sous-ensemble discernables E_1, E_2, \dots, E_k et contient n éléments .
- Les E_i sont supposés discernables entre eux mais les éléments formant E_i ne le sont pas.
On a $n = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ où n_i est le cardinal de E_i

Exemple:

L'ensemble $E = \{a, a, a, b, b, c, c, c, c\}$ est formé de 3 groupes d'éléments discernables qui sont :

$$E_1 = \{a, a, a\}$$

$$E_2 = \{b, b\}$$

$$E_3 = \{c, c, c, c\}.$$

Permutation avec répétition

- **Une permutation avec répétition** de n éléments d'un ensemble E est **une disposition ordonnée** dont le premier élément figure n_1 fois, le second n_2 fois, ... et le dernier élément figure n_k fois.
- Le nombre de permutation avec répétition est égal à

$$P_n = \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_k!}$$

Exemple:

Soit $E = \{7, 1, 7, 1\}$, $E_1 = \{1, 1\}$ et $E_2 = \{7, 7\}$ Alors on aura :

1177, 1717, 1771, 7711, 7171, 7117

Le nombre est égal à :
$$P_n = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{24}{4} = 6$$

Arrangements sans répétition

- Un arrangement sans répétition de p éléments choisis parmi n est une disposition ordonnée sans répétition de p éléments choisis parmi n de E . On suppose que $p < n$.

Exemple:

Soit $E = \{a, b, c\}$, les arrangements sans répétition sont:

$\{a, b\}, \{a, c\}$

$\{b, a\}, \{b, c\}$

$\{c, a\}, \{c, b\}$

- Le nombre d'arrangement sans répétition de p éléments choisis parmi n est égal à

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Arrangements sans répétition

Exemple 1:

Supposons qu' on a 5 candidats A,B,C,D et E dans une assemblée qui vont élire un bureau comprenant 3 personnes (président, vice-président et trésorier).

Alors le nombre de bureaux possibles est égale à

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{2 \times 1} = \frac{120}{2} = 60$$

Arrangements sans répétition

Exemple 3:

Soit E un ensemble constitué de n lettres de l'alphabet. Etant donné un tableau formé de p cases. On veut écrire une lettre dans chacune des cases de ce tableau.

Case 1	Case 2			Case p

- Pour la case N°1, on va choisir une seule lettre parmi n lettres. Alors on aura n choix possibles pour la première case.
- Dans ce cas, on suppose que $n > p$ et qu'une lettre ne peut être écrite qu'une seule fois

Arrangements sans répétition

Une fois la case N°1 est occupée, on aura:

- (n-1) lettres restantes pour la case N° 2;
- (n-2) lettres restantes pour la case N° 3;
-
- (n-p+1) lettres restantes pour la case N° p;

D'où le résultat:

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times (n-p+1)$$

Arrangements avec répétition

- Un arrangement avec répétition de p éléments choisis parmi n est une disposition ordonnée avec répétition de p d'entre les n éléments.

Exemple 1:

Soit $E = \{a,b,c\}$, les arrangements de 2 éléments qu'on peut former à partir des éléments de E sont:

$\{a,a\}, \{a,b\}, \{a,c\}$

$\{b,a\}, \{b,b\}, \{b,c\}$

$\{c,a\}, \{c,b\}, \{c,c\}$

- Le nombre d'arrangement avec répétition de p éléments qu'on peut former à partir de n éléments est égal à $\underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{p.\text{fois}} = n^p$

Arrangements avec répétition

Exemple 2:

Supposons que le numéro de téléphone est constitué de 9 chiffres. Alors le nombre de lignes téléphoniques qu'on peut accorder dans une ville est égal à

$$\underbrace{10 \times 10 \times \dots \times 10}_{9. \text{ fois}} = 10^9$$

NB: Le numéro 000000000 peut être considéré comme un numéro de téléphone.

Arrangements avec répétition

Exemple 3:

Soit E un ensemble constitué de n lettres de l'alphabet. Etant donné un tableau formé de p cases. On veut écrire une lettre dans chacune des cases de ce tableau.

Case 1	Case 2			Case p

- Pour la case N°1, on va choisir une seule lettre parmi n lettres. Alors on aura n choix possibles pour la première case.
- Dans ce cas, la répartition est permise. Donc une même lettre peut être écrite dans plusieurs cases.

Arrangements avec répétition

Dans ce cas, on aura:

- Le choix entre n lettres possibles pour la case N° 2;
- Le choix entre n lettres possibles pour la case N° 3;
-
- Le choix entre n lettres possibles pour la case N° p ;

D'où le résultat:

$$\underbrace{n \times n \times n \times \dots \times n}_{p. \text{ fois}} = n^p$$

Combinaison sans répétition

- **La combinaison sans répétition** de p éléments choisis parmi n éléments d'un ensemble E est **une disposition non ordonnée et sans répétition** de p éléments choisis parmi n éléments.
- Le nombre de combinaison sans répétition de p éléments qu'on peut former à partir de n éléments est égal à $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Exemple:

Supposons qu'on a 5 candidats A,B,C,D et E dans une assemblée qui vont élire un bureau comprenant 3 personnes (la fonction de chacun des membres n'est pas spécifiée).

Alors le nombre de bureaux possibles est égal à

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 2 \times 1} = \frac{120}{12} = 10$$

Combinaison avec répétition

- **La combinaison avec répétition** de p éléments choisis parmi n éléments d'un ensemble E est **une disposition non ordonnée et avec répétition** de p éléments choisis parmi n éléments.
- Le nombre de combinaison avec répétition de p éléments choisis parmi n éléments est égal à

$$C_{n+p-1}^p = \frac{(n-1+p)!}{p!(n-1)!}$$

Exemple:

Soit $E = \{a,b,c\}$, les combinaisons avec répétition qu'on peut former à partir des éléments de E sont:

$\{a,a\}, \{a,b\}, \{a,c\}$

$\{b,b\}, \{b,c\}, \{c,c\}$

Propriété de Combinaison Sans Répétitions

● $C_n^p = C_n^{n-p}$

● $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

Relation de PASCAL

Cette relation donne lieu au **triangle de PASCAL**.

p	0	1	2	3
n					
0	C_0^0				
1	C_1^0	C_1^1			
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2		
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3	
\vdots					

p	0	1	2	3	4	5
n							
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
				\vdots			

Propriété de Combinaison Sans Répétitions

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a:

- $(a + b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p}$ (Binôme de NEWTON)

- Si $a = b = 1$ on aura :

$$\sum_{p=0}^n C_n^p = 2^n$$

Résumé sur des cas pratiques

➤ Cas de l'urne:

Il s'agit de tirer p éléments à partir d'une urne qui contient n éléments. L'application de la formule dépend de deux éléments qui sont:

- ❖ L'ordre des éléments dans l'urne.
- ❖ Avec ou sans remise des éléments dans l'urne.

	L'ordre est pris en compte	L'ordre n'est pas pris en compte
Sans remise	A_n^p	C_n^p
Avec remise	n^p	C_{n-p-1}^p

Résumé sur des cas pratiques

➤ Cas de cases:

Il s'agit de placer p objets dans n cases. Le nombre de possibilités dépend de deux éléments qui sont:

- ❖ Discernable ou non des objets à placer.
- ❖ Nombre d'objets à placer par case.

	Discernables des objets	Non discernables des objets
Un seul	A_n^p	C_n^p
Un ou plusieurs	n^p	C_{n-p-1}^p

Exercices

Exercice 1:

Une organisation contient 25 membres dont 4 gestionnaires.

De combien de manières peut-on former un comité composé de 3 membres parmi lesquels on trouve :

- a) un et un seul gestionnaire ?
- b) au moins un gestionnaire ?

4 Gestionnaires	21 Non Gestionnaires
4	21

1 Gestionnaire	et 2 Non Gestionnaires	\Rightarrow	$A \cap B$
1	2		\downarrow

$$C_4^1 \times C_{21}^2$$

La réponse est : $M = C_4^1 \times C_{21}^2 = 4 \times 210 = 840$.

Exercices

4 Gestionnaires (G) 21 Non Gestionnaires (NG)

4

21

1 G et 2 NG

1

2

ou

2 G et 1 NG

2

1

ou

3 G et 0 NG

3

0

$A \cap B$



$C_4^1 \times C_{21}^2$

le nombre de comités
comprenant un seul
gestionnaire

$$(C_4^1 \times C_{21}^2)$$

\cup



+

$C \cap D$



$C_4^2 \times C_{21}^1$

le nombre de comités
comprenant 2
gestionnaires

$$(C_4^2 \times C_{21}^1)$$

\cup



+

$C \cap D$



C_4^3

le nombre de
comités de 3
gestionnaires

$$C_4^3$$

La réponse est : $M = C_4^1 \times C_{21}^2 + C_4^2 \times C_{21}^1 + C_4^3 = 970.$

Série N°1

EXERCICE 1: Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire les boules une à une et on les places à mesure en rangée.

1. Combien y a-t-il de dispositions possibles?
2. Combien y a-t-il de dispositions possibles d'y retrouver les boules paires côte à côte?
3. Combien y a-t-il de dispositions possibles d'y retrouver les boules paires côte à côte, de même que les boules impaires?

EXERCICE 2:

1. Combien peut-on former de numéros de téléphone à 10 chiffres ?
2. Combien peut-on former de numéros de téléphone à 10 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 ?

EXERCICE 3: Un questionnaire à choix multiples, autorisant une seule réponse par question, comprend 15 questions. Pour chaque question, on propose 4 réponses possibles. De combien de facons peut-on répondre à ce questionnaire ?

EXERCICE 4: Soit A l'ensemble des nombres de quatre chiffres, le premier étant non nul.

1. Calculer le nombre d'éléments de A.
2. Dénombrer les éléments de A :
 - (a) composés de quatre chiffres distincts
 - (b) composés d'au moins deux chiffres identiques
 - (c) composés de quatre chiffres distincts autres que 5 et 7

EXERCICE 5: Un sac contient 5 jetons verts (numérotés de 1 à 5) et 4 jetons rouges (numérotés de 1 à 4).

1. On tire successivement et au hasard 3 jetons du sac, sans remettre le jeton tiré. Calculer les probabilités:
 - (a) De ne tirer que 3 jetons verts
 - (b) De ne tirer aucun jeton vert
 - (c) De tirer au plus 2 jetons verts ;
 - (d) De tirer exactement 1 jeton vert.
2. On tire simultanément et au hasard 3 jetons du sac. Reprendre alors les questions a), b), c) et d).